

Capítulo 1

Algebra Matricial

1.1. Concepto de matriz

Una matriz es una disposición rectangular de números parámetros o variables y que tienen una ordenación en filas y columnas.

Ejemplo 1.1

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 7 & 3 \\ 4 & 0 \\ 9 & -5 \end{bmatrix}$$

En general:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

Donde: (a_{ij}) = elemento genérico.

"i" (1, 2, ..., m) = Es el primer subíndice y se refiere a la Fila.

"j" (1, 2, ..., n) = Es el segundo subíndice y se refiere a la Columna.

1.2. Dimensión u orden de una matriz

Es un par ordenado de números naturales, donde el primer elemento del par indica el número de filas que tiene la matriz, y el segundo componente del par indica el número de columnas que posee la matriz.

Así por ejemplo la dimensión o el orden de las anteriores matrices son:

$$\begin{aligned} \text{Orden } B &= (2, 3) = (2 \times 3) \\ \text{Orden } C &= (4, 2) = (4 \times 2) \end{aligned}$$

Generalizando: Orden $A = (m, n) = (m \times n)$.

1.3. Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales si y sólo si; tienen el mismo orden y además si los elementos que ocupan la misma posición en ambas matrices son iguales.

En símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} \text{1er. orden } A = \text{Orden } B \\ \text{2do. } a_{ij} = b_{ij}; \forall i, j \end{cases}$$

1.4. Operaciones con matrices

1.4.1. Suma de matrices

La suma de matrices del mismo orden, es otra matriz que tiene la misma dimensión y cuyos elementos se obtienen sumando sus elementos correspondientes de esas matrices.

"Matrices con distinto orden no se pueden sumar, porque no están definidas".

Es decir: Si tenemos las matrices:

$$A_{(3,2)} = (a_{ij}); \quad B_{(3,2)} = (b_{ij})$$

$$\text{Entonces } A + B = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Desarrollo:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{pmatrix}$$

Solo
si
son
Iguales

Propiedades

La suma de matrices cumple con las propiedades de:

1. **Conmutativa:** $A + B = B + A$.
2. **Asociativa:** $(A + B) + C = A + (B + C)$.

1.4.2. Resta de matrices

La resta de dos matrices de igual orden, es otra matriz de igual dimensión, cuyos elementos se obtienen restando sus elementos correspondientes de las matrices considerados como minuendo y sustraendo respectivamente.

"Matrices con distinto orden no es posible restar porque no están definidas".

En símbolos: Sea las matrices:

$$C_{(2 \times 2)} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}; D_{(2,2)} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces: } C - D = (c_{ij}) - (d_{ij}) = (c_{ij} - d_{ij}).$$

Desarrollo:

$$C - D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} - d_{11} & c_{12} - d_{12} \\ c_{21} - d_{21} & c_{22} - d_{22} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.2 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 9 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}_{3,2}; \quad B = \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -4 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}_{3,2}; \quad C = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 7 & -9 & 3 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

$$D = \begin{pmatrix} 12 & -10 & 5 \\ -8 & 3 & -2 \end{pmatrix}_{(2,3)}; \quad E = \begin{pmatrix} 13 & -6 \\ -9 & 7 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}_{(3,2)}; \quad F = \begin{pmatrix} -18 & 5 & -9 \\ 4 & -7 & 3 \end{pmatrix}_{(2,3)}$$

Calcular: a) $A + B$, b) $B + C$, c) $C - D$, d) $F - C$, e) $D - E$ y f) $(A + E) + B = A + (E + B)$.

Desarrollo: a) $A_{(3,2)} + B_{(3,2)} = \text{Está definida}$

$$A + B = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 9 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -4 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 5 & 1 \\ 11 & -5 \end{pmatrix} //$$

b) $B_{(3,2)} + C_{(2,3)} = \text{No es posible porque son de distinta dimensión.}$

c) $C_{(2,3)} - D_{(2,3)} = \text{Es posible.}$

$$C - D = \begin{pmatrix} -8 & 4 & -6 \\ 7 & -9 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 & -10 & 5 \\ -8 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 14 & -11 \\ 15 & -12 & 5 \end{pmatrix} //$$

1.4.3. Multiplicación escalar

Se llama escalar a todo número real o complejo. A los escalares se representan mediante las letras griegas: α, β, λ .

Por definición, el producto de un escalar por una matriz de orden $(m \times n)$, es otra matriz de igual orden, cuyos elementos se obtienen multiplicando el escalar por cada uno de los elementos de una matriz.

En símbolos:

Sea el escalar " α " y la matriz: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$. Entonces:

$$\alpha \cdot A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \alpha a_{23} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.3 Sean los escalares $\alpha = -2$ y $\beta = \frac{2}{3}$ y las matrices:

$$G = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -9 \\ 4 & -8 & 7 \end{pmatrix}_{2,3}; \quad H = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 15 & -6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}_{3,2}$$

Calcular: a) $\alpha \cdot G$, b) $\beta \cdot H$, c) $(\alpha\beta)G$.

Desarrollo: b)

$$\beta \cdot H = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 15 & -6 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & \frac{10}{3} \\ 10 & -4 \\ -2 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} //$$

Propiedades

1. **Conmutativa:** $\alpha A = A\alpha$.

2. Asociativa:

2.1. $(\alpha\lambda)A = \alpha(\lambda A)$.

2.2. $\alpha(AE) = (\alpha A)E$.

3. Distributiva:

3.1. $(\alpha + \lambda)A = \alpha A + \lambda A.$

3.2. $\alpha(A + E) = \alpha A + \alpha E.$

1.4.4. Multiplicación de matrices

1.4.4. Multiplicación de matrices.

La multiplicación de las matrices A y B se define únicamente cuando el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B ; es decir si la matriz A es de orden $(m \times p)$, la matriz B debe ser de orden $(p \times n)$.

En símbolos:

$$\exists A \times B \Leftrightarrow A = (a_{ij}) = \text{orden } (m \times p) \wedge B = (b_{ij}) = \text{orden } (p \times n)$$

Luego: $C = (c_{ij}) = A \times B$.

Luego: $C = (c_{ij}) = A \times B$.
Significa que para obtener los elementos de la matriz producto "C"; se multiplica cada fila de A por todas y cada una de las columnas de B; vale decir que se trata de una suma de productos.

Sean las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Luego:

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.4 Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -4 & 6 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$$

Determinar si las siguientes operaciones están definidas y efectuar el producto posible: a) $C \times B$, b) $C \times A$, c) $D \times B$, d) $C \times D$ y e) $A \times B$.

Desarrollo:

a) $C_{(2,2)} \times B_{(3,2)} =$ No está definida, porque no cumple la condición.

b) $C_{(2,2)} \times A_{(2,3)} =$ Es posible.

$$C \times A = \begin{pmatrix} -8 & 7 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C \times A = \begin{pmatrix} -8(-4) + (7)(3) & -8(6) + (7)(-2) & -8(5) + (7)(6) \\ 9(-4) + (-6)(3) & 9(6) + (-6)(-2) & 9(5) + (-6)(6) \end{pmatrix}$$

$$C \times A = \begin{pmatrix} 32 + 21 & -48 - 14 & -40 + 42 \\ -36 - 18 & 54 + 12 & 45 - 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53 & -62 & 2 \\ -54 & 66 & 9 \end{pmatrix} //$$

1.4.5. Propiedades

1. Conmutativa: $A \times B \neq B \times A$.

2. Asociativa: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$.

3. Distributiva:

3.1. $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$. (a Izquierda).

3.2. $(B + C) \times A = (B \times A) + (C \times A)$. (a Derecha).

1.5. Matrices especiales

Se tienen las siguientes:

1.5.1. Matriz cuadrada

Es toda matriz que tiene el mismo número de filas y de columnas.

En símbolos:

$$A_{(n,n)} = A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Los elementos de la **diagonal principal** de la matriz cuadrada A_n se caracterizan por tener sus dos subíndices iguales, es decir: $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$.

El otro extremo constituye ser la contradiagonal o diagonal secundaria.

Ejemplo 1.5 $A_{3,3} = A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 9 & -2 & 7 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix}$

Propiedad importante.

Se refiere a que el producto de una matriz cuadrada por una matriz identidad, cumple con la ley conmutativa y además es igual a la matriz dada inicialmente.

Es decir:

$$A_n \times I_n = I_n \times A_n = A_n$$

1.5.5. Matriz idempotente

Una matriz cuadrada constituye ser matriz idempotente, si y sólo si es igual a su cuadrado.

Significa que: A_n es idempotente $\Leftrightarrow A_n = A_n^2$.

Ejemplo 1.9 Demostrar que la matriz siguiente es idempotente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0-2 \\ 2-1 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.5.6. Matriz involutiva

Una matriz cuadrada se denomina matriz involutiva, si y sólo si su cuadrado es igual a la identidad.

En símbolos: A_n es involutiva $\Leftrightarrow A_n^2 = I_n$.

Ejemplo 1.10 Demostrar que la matriz siguiente es involutiva:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.6. Transposición de matrices

La transpuesta de una matriz A de orden $(m \times n)$ es otra matriz de orden $(n \times m)$, cuyos elementos se obtienen cambiando filas por columnas o viceversa.

En símbolos:

$$A_{(m \times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Su transpuesta será:

$$A_{(n \times m)}^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{m1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1.11 Hallar la transpuesta de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 9 & 5 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ -5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ 6 & -3 & 4 \\ 5 & -9 & 8 \end{pmatrix}; E = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 3 \\ 9 & -8 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

De donde la transpuesta de la matriz "E" será:

$$E_{(4 \times 2)} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -6 & 3 \\ 9 & -8 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow E_{(2 \times 4)}^t = E' = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 9 & 5 \\ -4 & 3 & -8 & -3 \end{pmatrix}$$

Propiedades. Se tienen los siguientes:

1. $(A + B)^t = A^t + B^t$.
2. $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.
3. $(A \times B)^t = B^t \times A^t$.
4. $I_n^t = I_n$.
5. $(A^t)^t = A$.

1.7. Matriz simétrica y antisimétrica

1.7.1. Matriz simétrica

Una matriz cuadrada es simétrica si es igual a su transpuesta.
En símbolos A_n es simétrica $\Leftrightarrow A_n = A_n^t$.

Ejemplo 1.12 Demostrar que la matriz siguiente es simétrica:

$$A_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix} = A_{(3 \times 3)}^t = A_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$$

1.7.2. Matriz antisimétrica

Una matriz cuadrada es antisimétrica, si es igual a la opuesta de su transpuesta.
Es decir:

$$A_n \text{ es antisimétrica } \Leftrightarrow A_n = -A_n^t$$

"Los elementos de la diagonal principal de toda matriz antisimétrica son nulos".

Ejemplo 1.13 Demostrar que la matriz siguiente es antisimétrica:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = A_3^t = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades.

1. La suma de toda matriz cuadrada y de su transpuesta, es una matriz simétrica.

En símbolos: $A_n + A_n^t =$ Es simétrica.

2. La diferencia de toda matriz cuadrada con su transpuesta, es una matriz antisimétrica.

Es decir: $A_n - A_n^t =$ Es antisimétrica.

3. Toda matriz cuadrada se puede descomponer como suma de una matriz simétrica y de una matriz antisimétrica.

En símbolos: $A_n = \frac{1}{2}(A_n + A_n^t) + \frac{1}{2}(A_n - A_n^t)$

Ejemplo 1.14 Dada la matriz siguiente, descomponer como suma de una matriz simétrica y antisimétrica:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -7 \\ 9 & -12 & 3 \\ -5 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

1.8. Ecuaciones matriciales

Sean las ecuaciones lineales siguientes:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 = y_3 \end{cases}$$

Este sistema de ecuaciones es equivalente a la ecuación matricial siguiente:

$$A_{(3,2)}X_{(2,1)} = Y_{(3,1)}$$

Es decir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, se puede afirmar que el producto de una matriz dada por una matriz columna, se obtiene como resultado otra matriz columna.

Ejemplo 1.15 Hallar los elementos de la matriz incógnita X , en las ecuaciones matriciales siguientes:

a)

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3x+4z & -3y+4t \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6x-8z & 12y-16t \\ -4x & -8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 8 & -4 \end{pmatrix}$$

Igualando sus elementos correspondientes y formando sistemas por columnas:

$$\begin{aligned} (I) \quad & \begin{cases} 6x - 8z = 6 \\ -4x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = -2 \\ (II) \quad & \begin{cases} 12y - 16t = -6 \\ -8y = -4 \end{cases} \Rightarrow y = 1/2 \end{aligned}$$

Sustituyendo en (I)

$$6(-2) - 8z = 6$$

$$\begin{aligned} -8z &= 18 \\ z &= -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

Reemplazando en (I)

$$12\left(\frac{1}{2}\right) - 16t = -6$$

$$-16t = -12(-1)$$

$$t = \frac{3}{4}$$

$$\text{Por tanto: } X = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} //$$

$$b) X \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 9x - 6z = 4 - 10 & 9y - 6t = -5 - 10 \\ 15x - 10z = 3 - 6 & 15y - 10t = 1 - 6 \\ -90x + 60z = -40 & -90y + 60t = 50 \\ 90x - 60z = 10 & 90y - 60t = -6 \end{cases}$$

1.9. Inversión de matrices

Dada una matriz A , se afirma que invertir esa matriz A es encontrar otra matriz denotada por A^{-1} ; de tal manera que el producto de la matriz A por su inversa, a derecha e izquierda sea igual a la matriz identidad.

$$\text{Es decir: } A_n \cdot A_n^{-1} = A_n^{-1} \cdot A_n = I_n$$

El problema de la inversión de matrices corresponde únicamente al campo de las matrices cuadradas, es decir que tanto la matriz A como su inversa deben ser cuadradas.

1.9.1. Matriz singular y no singular

Una matriz cuadrada A , se denomina matriz singular cuando su determinante es igual a cero, es decir $|A| = 0$; y constituye ser matriz no singular, cuando su determinante es diferente de cero, es decir $|A| \neq 0$.

Todas las matrices no singulares tienen inversa; mientras que las matrices singulares no admiten inversa.

1.9.2. Fórmula para hallar la inversa de una matriz de orden (2×2)

Sea la matriz: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Su inversa estará dada por:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Donde: $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Ejemplo 1.16 Hallar la inversa, si existe de las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -15 & -10 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 8 & 7 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$$

Desarrollo:

Inicialmente encontramos el determinante de la matriz A, es decir:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = (4)(-6) - (-5)(7) = 11$$

$$|A| = 11 \neq 0$$

De donde la matriz A es no singular y tiene inversa. Aplicando la fórmula:

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -6 & 5 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$$

Asimismo:

$$|B| = \begin{vmatrix} -15 & -10 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = (-15)(6) - (-10)(9) = -90 + 90 = 0$$

$$|B| = 0$$

Entonces la matriz B es singular y no tiene inversa.

1.9.3. Propiedades

Se tienen las siguientes:

$$1. (A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}.$$

$$2. (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$3. I_n^{-1} = I_n.$$

$$4. (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t.$$

$$5. (\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}; \alpha \neq 0.$$

1.9.4. Método de Gauss-Jordan para invertir matrices

Algoritmo de Gauss-Jordan

Se denomina algoritmo al conjunto de reglas que sirven para llegar a una conclusión.

1. Se elige un elemento cualquiera diferente de cero de la matriz dada, al cual le denominaremos elemento pivote.
2. Se divide toda la fila en la que se encuentra el pivote entre ese elemento pivote.
3. Se anulan todos los elementos de la columna del pivote con excepción del mismo pivote.
4. Los restantes elementos se completan con sus elementos transformados, que se obtienen mediante la regla del rectángulo, es decir restando a cada elemento el producto de la contra-diagonal, dividido entre el pivote.
5. Se elige un nuevo pivote en diferente fila y columna a los pivotes anteriores y se reitera todo el procedimiento estudiado.

En tal sentido, si tenemos la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & \dots & \dots \\ x & y & z & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

1. Elemento pivote $a \neq 0$

$$2. \begin{pmatrix} \frac{a}{a} & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \dots & \dots \\ x & y & z & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} & \dots & \dots \\ 0 & y & z & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & b/a & c/a & \dots & \dots \\ 0 & y - bx/a & z - cx/a & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Elementos Transformados

$$d - \frac{bc}{a}$$

Para encontrar la inversa de una matriz A , por el método de Gauss-Jordan, inicialmente se escribe al lado la matriz identidad, es decir:

$$\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$$

Luego, se aplica las reglas de Gauss-Jordan a la matriz A y se transforma en otra matriz identidad; asimismo la matriz identidad escrita en principio se transforma en otra matriz que constituye ser la inversa de A .

Significa que:

$$\begin{bmatrix} A & I \\ I & A^{-1} \end{bmatrix}$$

Si los elementos obtenidos transformando la matriz A , no resultan ordenados de forma tal que constituyen una matriz identidad, esa identidad se logra mediante una adecuada permutación de filas.

Nota. En el caso de presentarse un pivote obligatorio igual a cero, se puede concluir afirmando que la matriz dada no tiene inversa.

Ejemplo 1.17 Hallar la inversa, si existe de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -11 \\ 1 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & -2 & -13 \\ 4 & -5 & 7 \\ -4 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & -9 \\ -2 & 8 & -4 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & -15 \\ 2 & -1 & -7 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Desarrollo de la inversa de A :

-2	-3	-11	-1	-0	0
1	-4	5	0	1	0
2	-3	6	0	0	1
0	-5	-1	1	2	0
1	-4	5	0	1	0
0	5	-4	0	-2	1
0	5	1	-1	-2	0
1	-29	0	5	11	0
0	25	0	-4	-10	1
0	0	1	-5	0	-5
1	0	0	-25	-15	29
0	1	0	-25	-10	1
1	0	0	-25	-15	29
0	1	0	-25	-10	1
0	0	1	-25	0	-25

Elementos transformados de los segundos cuadros:

$$\begin{aligned} 3 - \frac{(-2)(-4)}{1} &= 3 - 8 = -5 \\ -11 - \frac{(-2)(5)}{1} &= -1 \\ 1 - \frac{(-2)(0)}{1} &= 1 \\ 0 - \frac{(-2)(1)}{1} &= 2 \\ 0 - \frac{(-2)(0)}{1} &= 0 \\ -3 - \frac{(2)(-4)}{1} &= -3 + 8 = 5 \\ 6 - \frac{(2)(5)}{1} &= 6 - 10 = -4 \\ 0 - \frac{(2)(0)}{1} &= 0 \\ 0 - \frac{(2)(1)}{1} &= -2 \\ 1 - \frac{(2)(0)}{1} &= 1 \end{aligned}$$

Elementos transformados de los terceros cuadros:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(0)(5)}{-1} &= 1 \\ -4 - \frac{(-5)(5)}{-1} &= -4 - 25 = -29 \\ 0 - \frac{(5)(1)}{-1} &= 5 \\ 1 - \frac{(5)(2)}{-1} &= 1 + 10 = 11 \\ 0 - \frac{(5)(0)}{-1} &= 0 \\ 0 - \frac{(0)(-4)}{-1} &= 0 \\ 5 - \frac{(-5)(-4)}{-1} &= 5 + 20 = 25 \\ 0 - \frac{(-4)(1)}{-1} &= -4 \\ -2 - \frac{(-4)(2)}{-1} &= -2 - 8 = -10 \\ 1 - \frac{(-4)(0)}{-1} &= 1 \end{aligned}$$

Permutando filas.

De donde la inversa de A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} & -\frac{15}{25} & \frac{29}{25} \\ -\frac{25}{25} & -\frac{10}{25} & \frac{1}{25} \\ -\frac{5}{25} & 0 & -\frac{5}{25} \end{pmatrix}$$